Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique

Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Hussein Cheikh-Ali et William Hautekiet

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2019/2020

Séance 5 - Fonctions définies par des intégrales

Rappel. On peut parler de la convergence uniforme des intégrales, comme on a la convergence uniforme des suites et séries.

Définition 1. Soit I un intervalle non vide et f une fonction $X \times I \to \mathbb{R}$. On dit que l'intégrale $\int_I f(x,t)\ dt$ converge uniformément par rapport au paramètre x si

- pour tout $x \in X$, l'intégrale $\int_I f(x,t)\ dt$ converge (en particulier, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est Riemann-intégrable sur tout segment de I) ;
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un segment $[a,b] \subseteq I$ tel que pour tout $x \in X$ et pour tout $[c,d] \subseteq I$ on ait que

$$[a,b] \subseteq [c,d] \Rightarrow \left| \int_c^d f(x,t)\ dt - \int_I f(x,t)\ dt \right| < \varepsilon.$$

Propriété 1. *Suppose que l'intégrale de $f(x,t)$ converge uniformément sur X par rapport au paramètre x. Alors la fonction*

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\ dt$$

est continue sur X.

Propriété 2. *Suppose que*

- *$f : X \times I \to \mathbb{R}$ est continue sur $X \times I$;*
- *l'intégrale de f converge uniformément sur X ;*
- *f est dérivable par rapport à x est la dérivée est continu sur $X \times I$;*
- *l'intégrale de $\frac{\partial f}{\partial x}$ converge uniformément sur X.*

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\ dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{dF}{dx}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt.$$

Exercice 1. *Étudier la convergence uniforme des intégrales suivantes :*

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(xt)}{t^2}\,dt$;

b) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-xt}\,dt$ *pour* $x \in [0,1]$;

c) $\displaystyle\int_0^1 (\ln(xt))^{1/3}\,dt$ *pour* $x \in [1,3]$;

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,dt$;

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$;

f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t}\,dt$;

Exercice 2. *Sur l'intervalle* $]0,1[$ *la fonction*

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{(\sin(xt))^{1/3}}\,dt$$

est-elle continue ? Est-elle C^1 *? Justifier.*

Exercice 3. *Sachant que pour* $x > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2},$$

montrer que pour $x > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(x^2+t^2)^2} = \frac{\pi}{4x^3}.$$

Exercice 4. *La fonction*

$$F(x) = \int_\pi^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{(t-\pi)^{1/2}}\,dt$$

est-elle continue sur $]0,1[$ *?*